数論的関数の iteration と ψ_0 関数について

山下 倫範 † 宮田 大輔 ‡ 柴木 恒一 ⋆ 藤田 菜摘 *

立正大学 † 千葉商科大学 ‡ 岩手県立大学宮古短期大学 ⋆ 富士通 Japan*

キーワード Euler の φ 関数，iteration，Dedekind の ψ 関数，導来対数関数，ψ_0 関数

1 はじめに

数論的関数の iteration については，Euler の φ 関数の iteration がよく知られている．

それは φ 関数の "$n > 1$ であれば，$\varphi(n) < n$" であることに着目し，$\varphi^k(n) = \varphi(\varphi^{k-1}(n)) \quad (k > 1)$ と記述することにすれば，

$$\varphi(n),\ \varphi(\varphi(n)),\ \varphi(\varphi(\varphi(n)),\ \cdots,\ \varphi^\ell(n),\ \cdots$$

と φ を有限回作用させることにより，任意の自然数 $n > 1$ に対して，必ず，ある自然数 m が存在し，$\varphi^m(n) = 1$ となることがわかる．

この m の性質については，S.S.Pillai（1929）が最初に調べ始め [11, 12]，1943 年に H.Shapiro[14] がより詳しく調べ，この H.Shapiro の結果を知らないまま（文献交流不十分の時代背景もあり）1954 − 1955 年に H.Lindgren, E.S.Barnes[6, 1]，1960 年にも Murányi[10] が調べている．

また，H.Shapiro の結果に触発され，P. Erdös, A. Granvilie, C. Pomerance, C. Spiro, P. Pollack 等 [2, 13] 多くの数学者が $\varphi^k(n)$ の平均，$\sum \varphi^k(n)$, $\prod \varphi^k(n)$, $\dfrac{\varphi^k}{\varphi^{k+1}}(n)$ 等の諸性質を調べている．

2 iteration による導来対数的関数

S.S.Pillai が調べ始めた iteration の内容は次の結果で要約される．自然数 x に対して，$\varphi^m(x) = 2$ となる最小の整数 m を H.Shapiro[14] にしたがって $C(x)$ と表し，$C(1) = C(2) = 0$ と定める．このとき，

定理 1. （Shapiro[14, 16]）任意の自然数 x, y に対して

$$C(xy) = C(x) + C(y) + \epsilon(x, y)$$

が成立する．ただし

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} 1 & （x,\ y \text{ が共に偶数}） \\ 0 & （\text{それ以外}） \end{cases}$$

その後，1950 年に H.Shapiro[15] はさらに $n > 1$ に対し $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$ の素因数分解に対して次の数論的関数を定義し

定義 2. （Shapiro[15]）

$$f(n) = \prod_{i=1}^{r} f(p_i)(A(p_i))^{e_i - 1}$$

ただし，$f(p_i)$，$A(p_i)$ は $0 < f(p_i) < p_i$，$0 < A(p_i) \leqq p_i$，$f(2) = 1$，$A(2) = 2$ である自然数とする．

H.Shapiro[15] は $f(p_i)$ に簡単な例として $f(p_i) = p_{i-1} \quad (i > 1)$，$f(2) = 1$ を挙げている [16].

この f を用いて，$x > 2$ に対し，$f^k(x) = 2$ となるような $k = k_f(x)$ について $k_f(1) = k_f(2) = 0$ と定め，次の結果を示した．

定理 3. （Shapiro[15, 16, 17]）$c_f(x)$ を以下のように定義すれば

$$c_f(x) = \begin{cases} k_f(x) & x\ ：\text{奇数} \\ k_f(x) + 1 & x\ ：\text{偶数} \end{cases}$$

$c_f(x)$ について対数的関係式が成立する．

$$c_f(xy) = c_f(x) + c_f(y)$$

以上から見てきた通り，上の $C(x)$ の準対数的な関係式は，1 や 2 にたどり着くまでの回数に固執しなければ，$c_f(x)$ のように n の偶奇によって，以下のように $C(x)$ を見直し，$L(x)$ を定義することにより，完全対数的な関係を得られる．これについては，H. Lindgren[6] や山下 [20] も気づいていた．本質的な部分は変わらないが，対数的／準対数的では扱い方や一般化に微妙な差が出てくる．

定義 4. 次のように $L(x)$ を定義する

$$L(x) = \begin{cases} L(1) = 0 & \\ L(\varphi(x)) & （\ x \text{ が奇数}） \\ L(\varphi(x)) + 1 & （\ x \text{ が偶数}） \end{cases}$$

すると，任意の自然数 $x,\ y$ について

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

が成立する．

一方，宮田ー山下 [8] は偶奇を捨象して，f を次のように定義することにより，次の定理を得ている．

その前にオイラー関数 φ を異なる視点で拡張しておこう．

定義 5. （宮田ー山下 [8]）$\mathcal{P},\ \mathcal{N}$ をそれぞれ素数の集合，自然数の集合とし，関数 $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N}$ は，$1 \leqq f(p) < p$ （ $p \in \mathcal{P}$ ）を満たすものとする．このとき，f に依存するオイラー関数 $\varphi_f(x)$ を

$$\varphi_f(x) = x\prod_{i=1}^{r}\frac{f(p_i)}{p_i} \qquad \left(\varphi(x) = x\prod_{i=1}^{r}\frac{(p_i-1)}{p_i}\right)$$

と定める．ただし，$x = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}$ とする．

このとき，f に依存した φ_f を用いて，関数 L_f を次のように定義し

定理 6. （宮田ー山下 [8]）

$$L_f(1) = 0$$
$$L_f(x) = L_f(\varphi_f(x)) + \#\left|\{\ p \in f^{-1}(1) \mid p|x\ \}\right|$$

とすれば，任意の自然数 $x,\ y$ に対して

$$L_f(xy) = L_f(x) + L_f(y)$$

が成立する．

を得る．この L_f では偶奇を捨象した形の対数的関数を生じさせている．

しかるに，先ほどまでの $L(x)$ については，次のように簡単な評価が得られている．

命題 7. （Shapiro, et al.[14, 10, 8]）

$$\log_3 x \leqq L(x) \leqq \log_2 x$$

3 φ 関数や導来対数関数 L に関する予想と問題

我々は $L,\ \varphi$ に関する諸性質を調べる過程で，未解決ではあるがいくつかの予想や問題を提案している [9, 21, 24]．

L に関する abc 予想

$abc-$triple について次の不等式が成立する．

$$\max(L(a),\ L(b),\ L(c)) \leqq 2L(\mathrm{rad}\ (abc))$$

$\varphi(n)$ と n の間に素数が存在する

自然数 $n > 1$ について，$(\varphi(n),\ n]$ の間に少なくとも 1 個の素数が存在する．

4 ψ_0 関数とその導来対数関数 L_{ψ_0}

ここで Dedekind の ψ 関数を変形した ψ_0 関数を定義しよう．$n = \prod p_i^{e_i}$ として

定義 8.

$$\psi_0(n) = \begin{cases} 1 & (\ n = 1\ ) \\ \displaystyle\prod_i p_i^{e_i-1}\left\lfloor\frac{p_i+1}{2}\right\rfloor & (\ n > 1\ ) \end{cases}$$

113 以下の素数に対する ψ_0 関数値は次の通り．

Table of ψ_0(prime) from 2 to 113

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
ψ_0	1	2	3	4	6	7	9	10	12	15
p	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
ψ_0	16	19	21	22	24	27	30	31	34	36
p	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
ψ_0	37	40	42	45	49	51	52	54	55	57

この関数 ψ_0 は，我々の示した定理 6 の f に関する仮定を満足している．ψ_0 から導来する L_{ψ_0} の値を 100 以下で求めると次のようになる．

Table of L_{ψ_0} from 1 to 100

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_{ψ_0}	0	1	1	2	1	2	2	3	2	2
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
L_{ψ_0}	2	3	2	3	2	4	2	3	2	3
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L_{ψ_0}	3	3	3	4	2	3	3	4	2	3
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
L_{ψ_0}	4	5	3	3	3	4	2	3	3	4
n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
L_{ψ_0}	3	4	3	4	3	4	4	5	4	3
n	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
L_{ψ_0}	5	4	3	4	3	5	3	3	3	4
n	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
L_{ψ_0}	4	5	4	6	3	4	3	4	4	4
n	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
L_{ψ_0}	4	5	2	3	3	4	4	4	4	5
n	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
L_{ψ_0}	4	4	4	5	3	4	3	5	3	4
n	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
L_{ψ_0}	3	5	4	5	3	6	4	5	4	4

L_{ψ_0} については $L(x)$ と同様に我々の abc 予想（$c < 2^{30}$ では確認済 [9]）が考えられるが， L_{ψ_0} に対しては，パソコンで $c < 10^5$ の範囲で $abc-$triple 等の各値を実験すると，次のように，すでに 4 個の反例が存在していることがわかる．したがって，そのままでは予想は成立しないが，L に関する abc 予想の右辺の “2” をもう少し大きな数で置き換えることが可能か否かの実験がさらに必要となる．（パソコン実験では，“3” では成立している．）

a	b	c	$L_*(\overline{abc})$	$L_*(a)$	$L_*(b)$	$L_*(c)$
3	5^3	2^7	3	1	3	7
3^5	$5*19^2$	2^{11}	4	5	6	11
7	181^2	2^{15}	7	2	8	15
7^3	3^{10}	$2^{11}*29$	6	6	10	14

L_{ψ_0} を L_*，rad abc を $\overline{abc}$ と略記

確認したプログラム (Python) は以下の通り．

```
from math import gcd

N = 10**5

f = [i for i in range(N)]
rad = [1]*N
Lf = [0] * N

for i in range(2, N):
    if f[i] == i:
        for j in range(i, N, i):
            f[j] = f[j]//i * ((i+1)//2)
            rad[j] *= i

for i in range(2, N):
    if i % 2 == 0:
        Lf[i] = Lf[f[i]] + 1
    else:
        Lf[i] = Lf[f[i]]

for c in range(1, N):
    for a in range(1, c//2+1):
      if gcd(a,c) == 1:
        b = c - a
        q = Lf[c]/(Lf[rad[a]]+
                   Lf[rad[b]]+
                   Lf[rad[c]])
        if q > 2:
            print((a,b,c), q)
```

また，命題 7 に対応する L_{ψ_0} の評価については，上からの評価

$$L_{\psi_0}(x) \leqq \log_2 x$$

は明らかであるが，下からの評価について $L(x)$ を真似て考察すると，$L_{\psi_0}(x) = 1$ なる x は $x = 2,\ 3,\ 5$ であることから

$$L_{\psi_0}(x) \leqq n \Leftrightarrow x \leqq 5^n \Leftrightarrow \log_5 x \leqq L_{\psi_0}(x)$$

が予想されるが，例えば

$$L_{\psi_0}(73) = L_{\psi_0}(37) = 2 \text{ のとき } \quad 37,\ 73\ \nleqq 5^2$$

のように安易な予想は成立しないので，$L_{\psi_0}(x)$ に対する下からの評価は現在のところ得られていない．

．

5　今後の課題

- L_{ψ_0} に関する abc 予想で右辺の"2"をどこまで上げることができるか
- ψ_0 の Dirichlet 級数 $L(s, \psi_0)$ の計算

$$L(s,\ \psi) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2s)}$$

　と同様に $\zeta(s)$ を用いて表すことができるか

- $L_{\psi_0}(x)$ に対する下からの評価の決定

付録 A　久留島義太と Leonhard Euler

Euler の φ 関数については，日本の和算家・久留島義太（?－1757）が Euler よりも早く発見していたことが知られ，加藤平左衛門の「明治前日本数学史」第 3 巻第 5 章 "久留島義太" 第 2 節 "業績解説"（[4]，74 頁），「和算ノ研究　整数論」第四章諸約之法（[5]，117 頁）や遠山啓の「初等整数論」（[19]，73 頁）の中でも指摘されている．遠山は "久留島－Euler 関数" の呼称を推奨している．

付録 B　ψ_0 関数と μ 関数の convolution

$L(s, \psi_0)$ を求める一助を考え，$\psi_0 * \mu(n)$ を計算してみると次のように求められた．．

$$\psi_0 * \mu(n) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(n)}{2} & (\ n:\ \text{奇素数}\ ) \\ \quad 0 & (\ \omega(n) \leqq 2,\ 2 \| n) \\ \psi_0(\text{rad }(n))\varphi\left(\dfrac{n}{\text{rad }(n)}\right) & (\ \text{それ以外}\ ) \end{cases}$$

ただし，$\omega(n)$ は n の異なる素因数の個数を表す．

参考文献

[1] Barnes E. S., *Note 225*, Australian Math. Teacher 11 (1955), 20-21

[2] Erdös, P., Granvilie A., Carl Pomerance, C., Spiro, C.,*On the Normal Behavior of the Iterates Of some*

Arithmetic Functions, Analytic Number Theory (Allerton Park, IL, 1989) (eds. Berndt, B. C., Diamond, H. G., Halberstam, H. and Hildebrand, A.), Progress in Mathematics, 85 (Birkhäuser, Boston, MA, 1990), 165?204

[3] 平山諦，久留島義太，日本数学史学会，数学史研究，第 108 号，1986，p.1-27
`http://www.wasan.jp/sugakusipdf/sugakusi108.pdf`
(2023.5.18 参照)

[4] 加藤平左衛門，久留島義太の業績，日本学士院編"明治前日本数学史"，第 3 巻，第 5 章「久留島義太」第 2 節 :「業績解?」，1957，62–76

[5] 加藤平左衛門，和算ノ研究　整数論，第四章　諸約之法，日本学術振興会，1964.3.15，

[6] Lindgren, H., *Note.211 Given the Method, Find the Problem*, Australian Math. Teacher 10 (1954), 52-53

[7] Lind D., *Problem 5239*, Amer. Math. Monthly, 71 (1964), p.1047, Solution., Ibid., 72 1965), p.1035.

[8] Miyata, D.−M.Yamashita, M., *Note on derived logarithmic functions of Euler's functions* (in Japanese), Proceedings of Autum meeting(App. Math.), Math. Soc. of Japan, 2004.9,

[9] 宮田大輔 − 山下倫範，Euler 関数導来対数的関数の abc−triple の高速列挙アルゴリズム，国際 ICT 利用研究学会論文誌，Vol.1-1（2017.6），111-116

[10] Murányi, A., *Az Euler-félé ϕ -függvény iterálásával nyert számelméleti függvényröl*, Mat. Lapok (Budapest) 11 (1960), 46-67

[11] Pillai S. S., *On some functions connected with $\phi(n)$*, Bull. Amer. Soc., 35 (1929), 832-836

[12] Pillai S. S., *On a function connected with $\phi(n)$*, Bull. Amer. Soc., 35 (1929), 837-841

[13] Pollack, P., *Two remarks on iterates of Euler's totient function*, Arch. Math. (Basel) 97(5) (2011), 443?452

[14] Shapiro, H., *An arithmetic function arising from the ϕ function*, Amer. Math. Monthly, 50 (1943), 18-30

[15] Shapiro, H., *On the iterates of a certain class of arithmeti functions*, Comm. Pure Appl. Math. 3 (1950), 259-272

[16] Shapiro, H., *Iterates of arithmetic functions and a Property of the sequence of primes*, Pacific J. Math.,Vol.3 No.3, 647−655 (1953)

[17] Shapiro, H., *Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons, New York et al., 1983,:3.Arithmetic Functions § 3.7 Exercise # 17, 77-78

[18] Shparlinski, I. E., *On the sum of iterations of the Euler function*, J. Integer Seq. 9(1) (2006), Article no. 06.1.6.

[19] 遠山啓，初等整数論 (日評数学選書)，日本評論社，1972.1.1.

[20] 内山三郎（岡山大）→山下倫範，private communication，1977.9.12
`http://yamashita-lab.net/yamasita-diary/uchiyama_19770912.pdf`

[21] Yamashita, M.−Miyata, D., *On the abc conjecture for a derived logarithmic function of the Euler function*, Proceedings of1st CCATS2015_IEEE(International Conference on Computer Application & TechnologieS 2015), Session # 7(9.2), Kunibiki Messe(Matsue，2015.8.31）9−2

[22] Yamashita, M.−Miyata, D. −Fujita, N., *The abc conjecture using logarithmic functions derived of Euler's function and its computer verification*, The Rissho Int'l J.，vol.2-1（2019.3），275-291

[23] 山下倫範 – 宮田大輔 – 藤田菜摘，Euler 関数の導来対数関数 $L(x)$ の諸相，地球環境研究，Vol.20（2021.3），67-72

[24] Yamashita, M.−Miyata, D., *20220321 notes:On a certain conjecture for $\varphi(n)$*, (unpublished), 2022.0321.
`http://yamashita-lab.net/yamasita-diary/20220321memo.pdf`

[25] Yamashita, M.−Miyata, D.−Shgibaki, K., *Note on the derived logarithmic fuction of a multiplicative arithmetic function*, 1st International Conference on ICT Application Research (IAR2023), Proc. of IAR2023 (Session 4: Mathematics and ICT Application Research), Fukui, 2023.09.10-09.12　(to appear)