

Euler 関数の導来対数関数 L で完全数問題を眺める

山下 倫範 *

立正 大学 データサイエンス学部

2024/8/31 IIARS 第 16 回研究会

1 完全数問題

1.1 完全数問題とは

Pythagoras が命名した完全数とは、自然数 n の 2 倍が丁度 n の約数の和 $\sigma(n)$ になっている場合のときをいう。すなわち、 n について次が成立している場合である。

$$2n = \sigma(n) \quad (\text{PN})$$

たとえば、 $n = 6$ であれば、

$$\begin{aligned} 2n &= 2 \cdot 6 = 12 \\ \sigma(n) &= \sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 \end{aligned}$$

$n = 28$ であれば、

$$\begin{aligned} 2n &= 2 \cdot 28 = 56 \\ \sigma(n) &= \sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 \end{aligned}$$

となり、 $n = 6, 28$ は完全数であることがわかる。

一般的に考察するには、 $n = \prod_{i=1}^s p_i^{e_i}$ と表せば、より具体的に

$$\begin{aligned} 2 \prod_{i=1}^s p_i^{e_i} &= \prod_{i=1}^s \sum_{j=0}^{e_i} p_i^j = \prod_{i=1}^s \sum_{j=0}^{e_i} (1 + p_i + \cdots + p_i^{e_i}) \\ &= \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1} \end{aligned} \quad (\text{PN}^*)$$

を満たす n を求めよという問題となる。

* yamasita@ris.ac.jp

PN*を次のようにとらえ，PNL の辺々に Euler の導来対数関数 L を作用させてみよう．

$$\begin{aligned}
2 \prod_{i=1}^s p_i^{e_i} &= \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1} \\
2 \prod_{i=1}^s (p_i - 1) p_i^{e_i} &= \prod_{i=1}^s p_i^{e_i+1} - 1 \\
1 + \sum_{i=1}^s (e_i + 1) L(p_i) &= \sum_{i=1}^s L(p_i^{e_i+1} - 1)
\end{aligned} \tag{PNL}$$

一方，素数 p についての $p^e - 1$ については円分多項式の関係式を用いて，円分数として

$$p^e - 1 = \prod_{d|e} \Phi_d(p) \tag{CN}$$

$$L(p^e - 1) = \sum_{d|e} L(\Phi_d(p)) \tag{CNL}$$

として表されることから，CN により円分数自身は約数和 $\sigma(n)$ と関係があることがわかり，円分数の素因数を調べることは，整数 n の約数和 $\sigma(n)$ の素因数を考察することと同じであり，昔から多くの実験が行われている．[4, 5, 6, 7]

ここで， L を通しての PNL をみると，もし，すべての p_i, e_i について，

$$(e_i + 1)L(p_i) = L(p_i^{e_i+1} - 1) \tag{PNL1}$$

が成立していれば，PNL の辺々の等号が成立しなくなるので，完全数問題は成立しなくなる．

1.2 偶数の完全数問題

偶数の完全数問題については，すでに Euclid が Mersenne 素数 $M_p = 2^p - 1$ を用いて $2^{p-1}M_p$ は完全数であることを述べており，後に，Euler がこの形に限ることを証明し，偶数の完全数問題については解決済である．[2]

1.3 奇の完全数問題

奇の完全数 (Odd Perfect Number Problem) については，それを満たす N について，実に様々なことが知られているが，その中で本ノートに関係するいくつかを挙げておこう．[1, 3]

$$N = q^E \prod_{i=1}^s p_i^{2e_i} \quad q \equiv E \equiv 1 \pmod{4}, p_i \text{ は素数}$$

$$(2e_i + 1)L(p_i) = L(p_i^{2e_i+1} - 1) \tag{PNL11}$$

$$(E + 1)L(q) = L(q^{E+1} - 1) \tag{PNL12}$$

の値が $e_i + 1, p_i, E, q$ によって，どのように振舞うのかを調べる必要がある．

以下，数式処理システム Maple を用いてのいくつかの表を提供しよう．

2 $L(\Phi_n(p_i))$ の表

$p = 11$		$p = 13$		$p = 17$		$p = 19$		$p = 23$	
n	$L(\Phi_d(11))$	d	$L(\Phi_d(13))$	d	$L(\Phi_d(17))$	d	$L(\Phi_d(19))$	d	$L(\Phi_d(23))$
3	5	3	6	3	7	3	6	3	7
4	6	4	7	4	7	4	7	4	8
5	12	5	13	5	14	5	14	5	16
6	5	6	6	6	6	6	6	6	7
7	17	7	18	7	20	7	22	7	23
8	12	8	13	8	14	8	16	8	16
9	17	9	18	9	20	9	20	9	23
10	12	10	13	10	14	10	14	10	15
11	31	11	32	11	35	11	15	11	38
12	11	12	12	12	15	12	15	12	15
13	33	13	37	13	43	13	42	13	46
14	16	14	18	14	21	14	20	14	23
15	23	15	24	15	28	15	28	15	32
16	24	16	26	16	29	16	30	16	32
17	48	17	52	17	56	17	59	17	64
18	17	18	17	18	19	18	20	18	20
19	50	19	57	19	61	19	59	19	69
20	24	20	26	20	28	20	29	20	32
21	33	21	36	21	40	21	43	21	44
22	28	22	32	22	28	22	35	22	39
23	66	23	71	23	76	23	79	23	86
24	23	24	25	24	29	24	28	24	28
25	59	25	65	25	70	25	73	25	77
26	35	26	38	26	43	26	43	26	45
27	52	27	55	27	59	27	61	27	66
28	35	28	36	28	40	28	43	28	43
29	82	29	87	29	96	29	102	29	105
30	22	30	24	30	30	30	26	30	30
31	91	31	95	31	100	31	101	31	115
32	49	32	53	32	58	32	59	32	63
33	59	33	64	33	69	33	71	33	75
34	48	34	52	34	58	34	59	34	48
35	68	35	72	35	81	35	87	35	92
36	34	36	38	36	38	36	39	36	42
37	102	37	111	37	124	37	127	37	140
38	49	38	53	38	59	38	64	38	68
39	68	39	72	39	81	39	84	39	89
40	47	40	52	40	56	40	60	40	61
41	124	41	122	41	143	41	146	41	154
42	33	42	36	42	39	42	41	42	44
43	115	43	128	43	142	43	152	43	166
44	57	44	63	44	70	44	73	44	79
45	68	45	75	45	80	45	86	45	91
46	64	46	70	46	78	46	80	46	86
47	135	47	144	47	161	47	166	47	178
48	49	48	49	48	60	48	59	48	62
49	118	49	130	49	141	49	151	49	154
50	61	50	61	50	73	50	72	50	79

$p = 29$		$p = 31$		$p = 37$		$p = 41$		$p = 43$	
n	$L(\Phi_d(29))$	d	$L(\Phi_d(31))$	d	$L(\Phi_d(37))$	d	$L(\Phi_d(41))$	d	$L(\Phi_d(43))$
3	8	3	8	3	8	3	9	3	8
4	8	4	8	4	10	4	9	4	9
5	16	5	17	5	18	5	19	5	18
6	7	6	7	6	8	6	8	6	9
7	23	7	24	7	27	7	24	7	26
8	16	8	18	8	19	8	20	8	20
9	23	9	24	9	25	9	24	9	24
10	17	10	17	10	18	10	19	10	17
11	42	11	42	11	42	11	45	11	45
12	16	12	17	12	16	12	18	12	17
13	48	13	50	13	50	13	57	13	52
14	23	14	22	14	24	14	27	14	25
15	31	15	33	15	36	15	37	15	34
16	34	16	36	16	38	16	39	16	38
17	67	17	71	17	72	17	73	17	71
18	22	18	17	18	25	18	26	18	26
19	76	19	73	19	76	19	77	19	78
20	33	20	32	20	36	20	35	20	39
21	49	21	49	21	51	21	54	21	52
22	42	22	43	22	44	22	46	22	45
23	93	23	93	23	99	23	98	23	101
24	32	24	33	24	34	24	38	24	37
25	79	25	84	25	90	25	90	25	90
26	49	26	51	26	54	26	54	26	55
27	69	27	74	27	76	27	81	27	79
28	49	28	47	28	53	28	54	28	54
29	115	29	115	29	120	29	127	29	130
30	33	30	33	30	34	30	37	30	35
31	121	31	124	31	130	31	133	31	140
32	66	32	70	32	70	32	77	32	76
33	84	33	85	33	85	33	92	33	89
34	68	34	66	34	72	34	78	34	75
35	99	35	96	35	105	35	107	35	112
36	46	36	51	36	48	36	53	36	55
37	147	37	145	37	155	37	158	37	161
38	69	38	74	38	80	38	79	38	75
39	99	39	100	39	104	39	110	39	112
40	66	40	69	40	72	40	75	40	74
41	169	41	169	41	180	41	181	41	184
42	47	42	48	42	54	42	55	42	51
43	169	43	174	43	184	43	191	43	194
44	84	44	85	44	91	44	91	44	92
45	95	45	96	45	104	45	105	45	108
46	89	46	92	46	100	46	97	46	101
47	193	47	196	47	198	47	203	47	216
48	66	48	63	48	71	48	78	48	71
49	167	49	177	49	180	49	188	49	190
50	84	50	82	50	88	50	93	50	95

$p = 47$		$p = 53$		$p = 59$		$p = 61$		$p = 67$	
n	$L(\Phi_d(47))$	d	$L(\Phi_d(53))$	d	$L(\Phi_d(59))$	d	$L(\Phi_d(61))$	d	$L(\Phi_d(67))$
3	9	3	10	3	10	3	10	3	9
4	10	4	10	4	10	4	10	4	11
5	19	5	19	5	20	5	20	5	21
6	9	6	9	6	8	6	9	6	10
7	27	7	29	7	28	7	29	7	10
8	20	8	18	8	21	8	20	8	21
9	26	9	26	9	28	9	28	9	30
10	20	10	19	10	20	10	21	10	20
11	46	11	47	11	49	11	51	11	52
12	19	12	19	12	19	12	20	12	21
13	57	13	59	13	57	13	59	13	60
14	26	14	27	14	28	14	29	14	30
15	37	15	37	15	38	15	40	15	41
16	40	16	39	16	41	16	42	16	42
17	75	17	80	17	80	17	83	17	85
18	26	18	27	18	27	18	30	18	29
19	85	19	85	19	87	19	87	19	89
20	38	20	41	20	38	20	42	20	42
21	55	21	58	21	58	21	58	21	59
22	45	22	48	22	49	22	48	22	51
23	104	23	104	23	111	23	113	23	111
24	37	24	39	24	40	24	39	24	40
25	91	25	96	25	102	25	101	25	106
26	58	26	59	26	57	26	62	26	61
27	81	27	81	27	83	27	86	27	87
28	58	28	57	28	60	28	58	28	61
29	137	29	139	29	138	29	140	29	144
30	40	30	39	30	39	30	40	30	38
31	140	31	142	31	147	31	149	31	153
32	77	32	81	32	82	32	84	32	86
33	95	33	97	33	99	33	97	33	102
34	76	34	81	34	82	34	83	34	84
35	112	35	116	35	115	35	119	35	126
36	55	36	57	36	57	36	59	36	60
37	167	37	173	37	176	37	176	37	182
38	80	38	87	38	87	38	89	38	91
39	109	39	116	39	115	39	121	39	121
40	76	40	80	40	80	40	82	40	82
41	191	41	198	41	202	41	199	41	200
42	52	42	56	42	57	42	57	42	57
43	195	43	200	43	208	43	206	43	214
44	97	44	99	44	101	44	100	44	103
45	113	45	116	45	116	45	119	45	119
46	101	46	107	46	110	46	110	46	112
47	218	47	221	47	234	47	228	47	235
48	77	48	78	48	80	48	78	48	82
49	197	49	205	49	211	49	208	49	206
50	94	50	94	50	100	50	102	50	103

3 $L(p^e - 1)$ の表

$p = 11$			
e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	8	-1	9
5	15	=	15
7	20	-1	21
9	25	-2	27
11	34	+2	33
13	36	-3	39
15	43	-2	45
17	51	=	51
19	53	-4	57
21	58	-5	63
23	69	=	69
25	74	-1	75
27	77	-4	81
29	85	-2	87
31	94	+1	93
33	98	-1	99
35	100	-5	105
37	105	-6	111
39	109	-8	117
41	127	+4	123

$p = 13$			
e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	9	=	9
5	16	+1	15
7	21	=	21
9	27	=	27
11	35	-8	33
13	40	+1	39
15	46	+1	45
17	55	+4	51
19	60	+3	57
21	63	=	63
23	74	+5	69
25	81	+6	75
27	82	+1	81
29	90	+3	87
31	98	+5	93
33	105	+6	99
35	106	+1	105
37	114	+3	111
39	118	+1	117
41	125	+2	123

$p = 17$			
e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	11	-1	12
5	18	-2	20
7	24	-4	28
9	31	-5	36
11	39	-5	44
13	47	-5	52
15	53	-7	60
17	60	-8	68
19	65	-11	76
21	71	-13	84
23	80	-4	92
25	88	-12	100
27	90	-18	108
29	100	-15	116
31	104	-20	124
33	115	-17	132
35	119	-21	140
37	128	-20	148
39	135	-21	156
41	147	-17	164

$p = 19$			
e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	9	=	9
5	17	+2	15
7	25	+4	21
9	29	+2	27
11	38	+5	33
13	45	+6	39
15	51	+6	45
17	62	+11	51
19	62	+5	57
21	74	+11	63
23	82	+13	69
25	90	+15	75
27	90	+9	81
29	105	+18	87
31	104	+11	93
33	115	+16	99
35	126	+21	105
37	130	+19	111
39	135	+18	117
41	149	+26	123

$p = 23$			
e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	11	-1	12
5	20	=	20
7	27	-1	28
9	34	-2	36
11	42	-2	44
13	50	-2	52
15	59	-1	60
17	68	=	68
19	73	-3	76
21	78	-6	84
23	90	-2	92
25	97	-3	100
27	100	-8	108
29	109	-7	116
31	119	-5	124
33	124	-8	132
35	135	-5	140
37	144	-4	148
39	146	-10	156
41	158	-6	164

$p = 29$			
e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	12	=	12
5	20	=	20
7	27	-1	28
9	35	-1	36
11	46	+2	44
13	52	=	52
15	59	-1	60
17	71	+3	68
19	80	+4	76
21	84	=	84
23	97	+5	92
25	99	-1	100
27	104	-4	108
29	119	+3	116
31	125	+1	124
33	138	+6	132
35	142	+2	140
37	151	*3	148
39	159	+3	156
41	173	+9	164

$p = 31$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	12	=	12
5	21	+1	20
7	28	=	28
9	36	=	36
11	46	+2	44
13	54	+2	52
15	62	+2	60
17	75	+7	68
19	77	+1	76
21	85	+1	84
23	97	+5	92
25	105	+5	100
27	110	+2	108
29	119	+3	116
31	128	+4	124
33	139	+7	132
35	141	+1	140
37	149	+1	148
39	162	+6	156
41	173	+9	164

$p = 37$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	12	=	12
5	22	+2	20
7	31	+3	28
9	37	+1	36
11	46	+2	44
13	54	+2	52
15	66	+6	60
17	68	=	68
19	73	+3	76
21	78	-6	84
23	90	-2	92
25	97	-3	100
27	100	-9	108
29	109	-7	116
31	119	-5	124
33	124	-9	132
35	135	-5	140
37	144	-4	148
39	146	-11	156
41	158	-6	164

$p = 41$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	14	<	15
5	24	<	25
7	29	<	35
9	38	<	45
11	50	<	55
13	62	<	65
15	70	<	75
17	78	<	85
19	82	<	95
21	92	<	105
23	103	<	115
25	114	<	125
27	119	<	135
29	132	<	145
31	138	<	155
33	151	<	165
35	155	<	175
37	163	<	185
39	181	<	195
41	186	<	205

$p = 43$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	12	=	12
5	22	+2	20
7	30	+2	28
9	36	=	36
11	49	+5	44
13	56	+4	52
15	64	+4	60
17	75	+7	68
19	82	+6	76
21	90	+6	84
23	105	+13	92
25	112	+12	100
27	115	+13	108
29	134	+8	116
31	144	+20	124
33	146	+14	132
35	160	+20	140
37	165	+17	148
39	176	+20	156
41	188	+24	164

$p = 47$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	14	-1	15
5	24	-1	25
7	32	-3	35
9	40	-5	45
11	51	-4	55
13	62	-3	65
15	70	-5	75
17	80	-5	85
19	90	-5	95
21	96	-9	105
23	109	-6	115
25	115	-10	125
27	121	-4	135
29	142	-4	146
31	145	-10	155
33	155	-10	165
35	163	-12	175
37	172	-13	185
39	180	-15	195
41	196	-9	205

$p = 53$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	15	=	15
5	24	-1	25
7	32	-3	35
9	40	-5	45
11	51	-4	55
13	62	-3	65
15	70	-5	75
17	80	-5	85
19	90	-5	95
21	102	-3	105
23	109	-6	115
25	120	-5	125
27	122	-3	135
29	144	-1	145
31	147	-8	155
33	159	-6	165
35	169	-6	175
37	178	-7	185
39	190	-5	195
41	203	-3	205

$p = 43$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	15	=	15
5	25	=	25
7	33	-3	35
9	43	-2	45
11	54	-1	55
13	62	-3	65
15	73	-2	75
17	85	=	85
19	92	-3	95
21	101	-4	105
23	116	+1	115
25	127	+2	125
27	126	-9	135
29	143	-2	145
31	152	-3	155
33	163	-2	165
35	168	-7	175
37	181	-4	185
39	187	-8	195
41	207	+2	205

$p = 47$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	15	=	15
5	25	=	25
7	34	+1	35
9	43	+2	45
11	56	-1	55
13	64	-1	65
15	75	=	75
17	88	+3	85
19	92	-3	95
21	102	-3	105
23	118	+3	115
25	126	+1	125
27	129	-6 <	135
29	145	=	145
31	154	-1	155
33	163	-2	165
35	173	-2	175
37	181	-4	185
39	195	=	195
41	204	-1	205

$p = 53$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	14	-1	15
5	26	+1	25
7	35	=	35
9	44	-1	45
11	57	+2	55
13	65	=	65
15	76	+1	75
17	90	+5	85
19	94	-1	95
21	103	-2	105
23	116	+1	115
25	132	+7	125
27	131	-4	135
29	149	+4	145
31	158	+3	155
33	168	+3	165
35	182	+7	175
37	187	+2	185
39	195	=	195
41	205	=	205

$p = 43$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	15	=	15
5	25	=	25
7	33	-2	35
9	47	+2	45
11	57	+2	55
13	69	+4	65
15	77	+2	75
17	92	+7	85
19	97	+2	95
21	105	=	105
23	121	+6	115
25	129	+4	125
27	136	+1	135
29	148	+3	145
31	158	+4	155
33	169	+4	165
35	178	+3	175
37	191	+6	185
39	204	+9	195
41	211	+6	215

$p = 47$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	15	=	15
5	26	+1	25
7	35	=	35
9	45	=	45
11	58	+3	55
13	68	+4	65
15	77	+2	75
17	93	+8	85
19	97	+2	95
21	105	=	105
23	122	+7	115
25	131	+6	125
27	134	-1	135
29	151	+6	145
31	167	+12	155
33	171	+6	165
35	181	+6	175
37	188	+3	185
39	200	+5	195
41	213	+10	203

$p = 53$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	14	-1	15
5	27	+2	25
7	37	+2	35
9	45	=	45
11	61	+6	55
13	70	+5	65
15	78	+3	75
17	91	+3	85
19	102	+7	95
21	106	+1	105
23	122	+7	115
25	135	+10	125
27	138	+3	135
29	155	+10	145
31	166	+11	155
33	176	+11	165
35	188	+13	175
37	190	+5	185
39	209	+14	195
41	220	+15	205

$p = 43$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	16	-2	18
5	28	-2	30
7	37	-5	42
9	47	-7	54
11	61	-5	66
13	71	-7	78
15	79	-11	90
17	94	-8	102
19	103	-11	114
21	111	-15	126
23	127	-11	138
25	133	-17	150
27	140	-22	162
29	160	-14	174
31	170	-16	186
33	176	-22	198
35	182	-28	210
37	195	-27	222
39	209	-25	234
41	223	-24	246

$p = 47$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	17	-1	18
5	28	-2	30
7	38	-4	42
9	49	-5	54
11	61	-5	66
13	70	-8	78
15	86	-4	90
17	96	-6	102
19	104	-10	114
21	113	-13	126
23	126	-12	138
25	138	-12	150
27	147	-15	162
29	156	-18	174
31	167	-19	186
33	176	-22	198
35	189	-21	210
37	200	-22	222
39	214	-20	234
41	226	-20	246

$p = 53$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	17	-1	18
5	28	-2	30
7	38	-4	42
9	49	-5	54
11	62	-4	66
13	73	-5	78
15	82	-8	90
17	98	-4	102
19	105	-9	114
21	113	-13	126
23	129	-9	138
25	140	-10	150
27	146	-16	162
29	165	-9	174
31	173	-13	186
33	176	-22	198
35	194	-16	210
37	204	-18	222
39	221	-13	234
41	230	-16	246

$p = 43$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	18	=	18
5	28	-2	30
7	40	-2	42
9	49	-5	54
11	62	-4	66
13	72	-6	78
15	83	-7	90
17	96	-6	102
19	106	-8	114
21	118	-8	126
23	134	-4	138
25	140	-10	150
27	146	-16	162
29	160	-14	174
31	173	-13	186
33	187	-11	198
35	196	-14	210
37	202	-20	222
39	215	-19	234
41	240	-6	246

$p = 47$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	17	-1	18
5	29	-1	30
7	38	-4	42
9	49	-5	54
11	63	-3	66
13	73	-5	78
15	85	-5	90
17	96	-6	102
19	102	-12	114
21	114	-12	126
23	129	-9	138
25	144	-6	150
27	145	-17	162
29	160	-14	174
31	177	-9	186
33	189	-9	198
35	195	-15	210
37	210	-12	222
39	216	-18	234
41	234	-12	246

$p = 53$ e	$L(p^e - 1)$		$L(p^e)$
3	16	-2	18
5	28	-2	30
7	39	-3	42
9	50	-4	54
11	64	-2	66
13	76	-2	78
15	82	-8	90
17	97	-5	102
19	104	-10	114
21	116	-10	126
23	134	-4	138
25	141	-9	150
27	154	-8	162
29	169	-5	174
31	179	-7	186
33	187	-11	198
35	196	-14	210
37	214	-8	222
39	223	-11	234
41	234	-12	246

参考文献

- [1] Nicomachus of Gerasa. Martin Luther D'Oge (Translator) Introduction to Arithmetic. The Macmillan Company (1926), pp.207–212
- [2] G. H. Hardy, E. M. Wright. Introduction to the Theory of Numbers, Clarendon Press, (1938) 316
- [3] Jose Arnaldo B. Dris, Doli-Jane Uvales Tejada, Revisiting some old results on odd perfect numbers, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Vol.24, No.4 18–25 (2018)
<https://nntdm.net/papers/nntdm-24/NNTDM-24-4-018-025.pdf>
- [4] 森本-木田, 円分数の素因数分解, 上智大学数学講究録, No.26, 1987
<https://digital-archives.sophia.ac.jp/repository/view/repository/20220405002>
- [5] 森本-木田-小林, 円分数の素因数分解 (その 2), 上智大学数学講究録, No.29, 1989
<https://digital-archives.sophia.ac.jp/repository/view/repository/20220405003>
- [6] 森本-木田-小林 円分数の素因数分解 (その 3), 上智大学数学講究録, No.35, 1992
<https://digital-archives.sophia.ac.jp/repository/view/repository/20220405004>
- [7] Factorizations of Cyclotomic Numbers,
<https://www.asahi-net.or.jp/~KC2H-MSM/cn/index.htm>, Referred 2024.8.01
- [8] D.Miyata- M.Yamashita, Note on derived logarithmic functions of Euler's functions, Proceedings of Autumn meeting(App. Math.), Math. Soc. of Japan, 2004.9, (in Japanese)