データサイエンス学部に於ける数学教育
ワリスの公式の形式化と教育的示唆

渡瀬泰成 †

† 立正大学データサイエンス学部

†ywatase@ss.iij4u.or.jp

キーワード　数学教育, 形式化証明, 定理証明支援系

1　はじめに

立正大学データサイエンス学部は, 産業界の要請や文部科学省の指針を受け, デジタル時代に対応した人材の育成を目的として 2021 年度に設立された. 同年度には初めて学生を迎え, 本格的に学部としての活動を開始した. 本学部の特徴の一つとして, 理系の学生に限らず, 文系の学生にも広く門戸を開いている点が挙げられる. そのため, 入試では数学を必須科目としない選抜区分も設けられており, 多様な背景を持つ学生が学ぶ環境が整えられている. 筆者は 2022 年度より, 本学部において数学演習科目（微分積分学演習, 線形代数学演習、統計学 II 実習）の授業を担当してきた. これらの科目は, すべて後期に 2 コマ連続の演習形式で開講されている. 2024 年度には, 微分積分学演習および線形代数学演習を受け持った. 本稿では, データサイエンス学部における数学教育の内容について, 高校数学から大学数学への橋渡しをどのように進めるべきかを考察する. とくに微積分の演習を通して理解が不足している箇所を指摘した. 本質な問題として, 何故分からないのかを考えた. 試しに高校数学レベルで扱える公式を, コンピュータで検証できる形の厳密な証明 (形式化証明という) を作成し検証を試みた. 形式化することにより証明自体を冷静な目で分析でき, 理解するのが難しい箇所を予測した. 形式化が数学教育に役立つか考察した.

1.1　演習・実習科目について

2025 年度後期に担当予定の「微分積分学演習」を例として、高校で数学 III を履修していない学生、すなわち理工系を志望する学生とは異なる背景を持つ学生に対する数学教育のあり方について紹介する。微分積分学および線形代数学は、高度な数学の基盤を形成する重要な分野である。本学部では、これらの科目をデータサイエンス教育の一環として位置づけ、学生が応用可能な数学的思考を身につけられるよう指導している。授業の具体的な進め方や指導方法については、文献 [?] に詳しく解説されているため、そちらを参照されたい。

1.2　微分積分学演習における指導方針と実践

微分積分学演習は後期に 2 クラスに対して実習を担当し, 受講者数はそれぞれ 51 名と 54 名であった. 本実習では, 以下の演習計画に基づき指導を行った. 具体的な実習内容は以下の表の通りである.

講義	内容
第 1 回	集合、数、写像、.
第 2 回	実数，数列，数列の極限.
第 3 回	関数の極限と連続性
第 4 回	微分法と導関数 (１)　平均変化率.
第 5 回	微分法と導関数 (２)　三角関数、指数関数.
第 6 回	１－５回の復習.
第 7 回	級数の収束と発散，冪級数
第 8 回	積分の概念，初等関数の積分
第 9 回	定積分と定積分の応用
第 10 回	多変数の関数
第 11 回	偏微分と偏導関数
第 12 回	重積分，多重積分
第 13 回	極座標，線積分
第 14 回	求積法と一階微分方程式.
第 15 回	線形微分方程式.

表１．微積分学実習の内容

本実習の方針は, 解析学の基本概念とその演習を自ら解くことで理解を深めることにある. 演習中は教室内を巡回し, 各学生の答案を確認しながら, つまづいている部分には適宜アドバイスを行った. 高校数学で計算力を養ってきた学生はスムーズに課題に取り組めるが, そうでない学生は問題の解釈や用語の理解に苦労する傾向があった. そこで, 基本事項の補強として, 高等学校の教科書 [?] を用いた復習を取り入れ, 練習問題を演習に組み込んだ.

具体的には, 書画カメラを使用して教科書の内容を投影し, 学習方法の説明を交えながら解説を行った. 特に理解が難しい部分については, 図を用いて丁寧に説明し, 関連する演習問題に取り組ませた. また、高校数学 III で導入される部分積分などの手法は, 一般的に概念の理解よりも計算技術・テクニックとして習得されることが多い. しかし, それらの経験がない学生にとっては, 短期間で習得するのが難しいと考えられた.

1.2.1 微積分学の理解について

高校の教科書を, 演習時の参考書として学生とともに読み直してみた。高校数学の知識の枠内でうまく整理された説明には感心したものの, 肝心の学生は今ひとつ納得できず, 例題を解けない者もいる. どこが理解できていないのかを探るため, 質問しながら計算過程を見せてもらうが, まったく手がつかないこともある.

おそらく, 中学・高校の段階で十分な計算訓練がなされてこなかったのだろう. たとえるなら, 計算尺の使い方を知らない者に計算尺を渡し,「早く計算しろ」と命じるようなものだ. 極端な場合を除けば, 三角関数・対数関数・指数関数の理解に苦しむ学生も少なくない. 教える側も, この「理解の難しさ」の原因を探究する必要がある. 前述の教科書には,「参考」として次のような積分の解説がある.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

これは ワリス (Wallis) の積分と呼ばれ、**ワリスの公式**を導く際に用いられる積分である. この積分を徹底的に形式化し, どのような点が難しいのかを検討することにした.

2 微積の理解と形式化証明

2.1 形式化証明を利用して計算過程を検証する

数学の定理の証明が論理的に正しいかどうかを厳密に推論し、検証するために、定理証明支援系（Proof Assistant）を用いる. 形式化証明では人間が証明をギャップの無い証明を作成しコード化する. コード化された証明を定理証明支援系が機械的に検証する. 本稿では形式化証明についての解説は深くは立ち入らにが, 解説としてよく, まとまった成書として文献 [?] をあげておくにとどめる. 本研究では、ワリスの公式を以下の手順で検証する.

1. 既存の証明の形式化: 既存の証明を定理証明支援系が読めるコードへ翻訳する. 通常, 教科書や書籍に記載された証明では細かい推論が省略されているため, 厳密な形式証明を作成する.
2. 定理証明支援系による検証: 厳密化された形式証明を定理証明支援系に入力し, 論理的な整合性が確認される.
3. 証明の妥当性の確認: 定理証明支援系によって推論の全ステップが検証されれば, その証明は正しいものと認められる.

筆者は, **Mizar** という定理証明支援系を用いてワリスの公式の形式証明を実施した. Mizar の証明ライブラリにはワリスの公式に関する既存の証明が存在しなかったため, 新たに証明を構築する必要があった. 形式化は文献 [?] を参考にした. その結果, 作成したソースコードは 2500 行を程の規模なものとなった. 最終的に得られた定理は, Mizar において以下のように記述される.

```
theorem Th58:
lim (sqrt Wallis_Seq) = 1/sqrt(PI)
proof
lim (sqrt Wallis_Seq) = sqrt (1/PI)
by Th55,Th57;
hence thesis by SQUARE_1:32, COMPTRIG:5;
end;
theorem Th60:
for n be Nat holds (sqrt Wallis_Seq).n
(sqrt(n+1)*((2*(n+1))!))
/((4^(n+1))*(((n+1)!)^2));
```

表 2. 形式証明コード例

2.2 形式化してみて分かったこと

三角関数の積分に関する証明であり, 内容としては比較的単純なもので, 高校の教科書にも参考として掲載されている. しかしながら, この証明を形式化する過程で, さまざまな示唆を得る結果となった. 三角関数は, 実軸全体で有界かつ微分可能な関数であり, 取り扱いやすい初等関数の一つである. 定理証明支援系の既存ライブラリにおいても, このクラスの関数に関する微積分の結果は多数形式化されている. ところが, 三角関数の任意べき乗に関する微積分の結果は、これまで形式化されていなかった. そこで, 実軸全体で有界かつ微分可能な関数が, 各点ごとの積によって乗法群を構成することを形式化し, その結果を踏まえ, 連続関数のべきを取る際に群の元とみなす仕組みを定義した. この過程では, 関数を別の対象として扱う, いわゆる「同一視」が発生している. さて、こ

こで学生の立場に立って考えてみると、関数同士の積を明確に認識できているだろうか？ 関数の合成とは異なる概念である。さらに、教える側としても、ある区間で連続な関数同士の加減乗除が連続であることを、果たして適切に説明しているだろうか？ 改めて、数学教育における基本概念の明確に教えることの重要性を考えさせられた。実際 $\sin^2$ は関数として扱えるが, 各点では $(\sin x)^2$ と解釈される. 兎角関数の記号は誤解を招きやすいの注意せねばならない. 数学の記述や数式の理解を妨げる要因について, 実際に定理証明支援系へ証明をコード化し, 入力する過程を通して考察した. 定理証明支援系は論理的に整合しないコードがあるとエラーを返す. sin を関数として処理する場合と乗法群の元として扱う場合には属性を変換しながらの処理が必要となる. 以下のコードは x が実関数として ^ x は代数系の元に変換を示し, 代数系の元 y は @ y で実関数へ変換される様子を示している.

```
@((^x)|^(n+1)) = (^x)|^(n+1) by Def3
```

表 3. 形式証明コード例

このような属性の不一致によって論理的に整合しないコードが発生した場合, エラーが返されるのは, 2 種類の数学的構造（代数と集合）にまたがる処理というのが本質的である. 一方で, 通常は同一視を行うことで, これを当然のこととして受け入れた上で推論を進めている. 同一視があることを指摘しないで説明すると, そのような了解なく説明を聴く側は理解できないであろう.

1. 同一視が存在している場合：関数であると同時になにかしらの代数構造の元とみなす. 分数が比をあらわすのか数を. 被積分関数の実数倍は定数関数を乗じているのか, 整式 x^2+x+1 は関数なのか, 多項式なのかといった解釈を要するとが発生する.

2. 記号が分かりにくい場合：同一視に起因するであろう $\int c(\text{定数関数}1)dx = c\int dx$ この場合は積分記号は積分区間の長さを示している. 定数関数 1 を残した方が親切と思う, $\int_0^x f dx$ は積分区間に関数 x を入れているのではなく任意の点の味だろうが変数 x の乱用に思える.

3. 商集合に由来する同一視: 関数空間に代数構造を入れるときれ例外的な集合を無視して等号を定める（至る所等しい）関係で商集合を考えている.

同一視の存在を認識して, 推論や手計算において, 計算機での計算処理でも明確に違いを意識することが必要である.

3 数学教育への応用

3.1 教訓を現場へ生かす

ここでは, 学生が関数を計算するときに適切な扱いができているかを確認する. 以前, 「$\sin, \cos$ を説明せよ」という演習を課したことがあったが, 多くの学生は「三角形の辺の比」と解答した. これは, 三角関数を関数として捉えていないことを示している. このような理解のままでは, 三角関数を含む微分・積分の学習が円滑に進まないと考える. そこで, 実軸全体で定義される実数値関数の集合に加法・乗法の演算を導入し, 関数の評価の仕方を明確に定義する. また, このような三角関数を含む実数値関数の具体例を示し, 演習を通じて理解を深める. 例えば, 関数の和に関しては, $f+g$ の x での評価が $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ であることを確認する. さらに, 関数の合成は関数の四則演算とは異なる概念である ことを明確にし, その違いを認識できるようにする. 具体的には, $\sin\theta^2$ と $\sin^2\theta, (\sin\theta)^2$ の違いを正しく理解できるよう指導を行う.

3.2 形式化数学の数学教育への応用

定理証明支援系の教育への応用は, 以前から試みられてきた [?]. 従来は主に論理教育への応用が中心であったが, 最近では学部レベルの数学教育において, 証明を支援するためのインターフェースを提供するプログラムの開発も進められている [?]. 証明を形式化しにくい部分には, 何らかの ギャップ が存在し, そこは慎重に論理を追う必要がある重要なポイントとなる. このような箇所では, 定理証明支援系が「君は誤っているよ」と冷徹に指摘してくれるため, 我々は機械を通じて学習していると言える. 高校数学レベルで扱える定理を形式化することにより急所を特定していくことが実行性がある.

4 結論

本稿では, データサイエンス学部における数学教育の課題と, それを解決するための形式化数学の可能性について考察した. 特に, 微積分演習において学生が直面する理解の困難を分析し, その主な要因として,

1. 関数の評価や代数構造の認識不足

2. 記号の誤用や同一視の問題

3. 証明の厳密性に対する意識の欠如

を指摘した.

これらの問題に対処するために, 定理証明支援系を用いた形式化数学の活用を提案し, Mizar によるワリスの公式の形式化を実践した. その結果, 証明の厳密化により数学的な「急所」を明確にできること, また関数同士の和と積や記号の使い方に関する誤解が学習の妨げになっていることが明らかになった. これらの知見は, 数学教育における指導の改善に示唆を与えている. 今後の展望として, 以下の 3 点が挙げられる.

1. 高校数学の証明を形式化し, 学習における理解の難所を特定することで, 学教育への形式化の効果を検証する.
2. 大学数学の論理学教育において, 定理証明支援系を活用した学習で数学的推論能力の向上を目指せないか検討する.
3. 既に定理証明支援系を教育環境に導入している事例を調査し、その教育的効果や課題を分析する.

本研究は、数学教育における形式化数学の有用性を検討する第一歩であり, 今後の研究を通じて, 形式化数学を活用した具体的な教育手法の確立を目指す.

参考文献

[1] 飯高茂,　松本幸夫　数学 III, 東京書籍, 2010

[2] 黒川信重, 現代三角関数論, 岩波書店, 2013

[3] 萩原学, アフェルト レナルド, CoqSSReflectMathComp による定理証明, 森北出版株式会社, 2019

[4] 友永 昌治（立正大学）. 文理系データサイエンス学部における数学教育, 国際 ICT 利用研究学会 特別研究会（第 2 回）, 2023.6.25

[5] Josef Urban, Formalized Mathematics as a Teaching Tool, Studies in Logic, Grammar and Rhetoric, 2004

[6] Patrick Massot. Teaching Mathematics Using Lean and Controlled Natural Language. In 15th International Conference on Interactive Theorem Proving (ITP 2024). Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), Volume 309